

# Ergänzung zum Skript Oberflächenhydrologie

Jens-Olaf Delfs

Juli 2014

# 1 Advektion

Die Advektionsgleichung ist die einfachste hyperbolische Gleichung. Sie ist der ideale Einstieg zur Vorlesung. Sie ist auch ideal zum erstmaligen Austesten bewährter oder neuer numerischer Verfahren. Scheitert ein Verfahren an der Lösung der Advektionsgleichung (d.h. ist es instabil) kommt es mit den komplexeren hyperbolischen Gleichungen wie der kinematischen oder dynamischen Welle auch nicht klar. Eine wichtige Klasse numerischer Methoden sind Explizite Finite Differenzen. Konsistente Finite-Differenzen-Methoden lassen sich erzeugen, indem in einer *partiellen Differentialgleichung* die Ortsableitungen durch Differenzenquotienten approximiert werden. Explizite Verfahren unterliegen stets einer Zeitschrittbeschränkung. Wird sie überschritten, ist das numerische Verfahren instabil.

## 1.1 Grundgleichung

Die Advektionsgleichung lautet

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial x} = 0}, \quad (1.1)$$

wobei  $c = \text{const.}$ . Sie ist eine *hyperbolische partielle Differentialgleichung* und benötigt Anfangsbedingungen  $H(x, 0) = H_0(x)$ . Damit ist ihre Lösung [ÜA 1]

$$H(x, t) = H_0(x - ct), \quad (1.2)$$

d.h. die Anfangsbedingung  $H_0(x)$  wird in  $x$ -Richtung um  $ct$  verschoben ( $t = 0$  am Anfang).

## 1.2 Explizite Finite Differenzen

Abbildung 1 illustriert eine Diskretisierung in Raum und Zeit. Sie dient zur numerischen Lösung einer ein-dimensionalen partiellen Differentialgleichung. Das Ortsgitter sei fest mit konstantem Gitterabstand  $\Delta x$ . Ebenso sei die Zeitschrittweite fest (nicht-adaptiv) und konstant  $\Delta t$ . Als Lösungsstrategie ermitteln wir, ausgehend von den diskretisierten Anfangsbedingungen  $H_0(x_i)$ , aus einem Zeitschritt  $n$  eine Näherungslösung für den nächsten Zeitschritt  $n + 1$ . Solche Verfahren werden *explizite Verfahren* genannt.

Eine Näherungslösung für einen neuen Zeitschritt  $n + 1$  ist nach Taylor

$$H_i^{n+1} = H_i^n + \underbrace{\frac{\partial H_i^n}{\partial t}}_{-c \frac{\partial H_i^n}{\partial x}} \Delta t + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 H_i^n}{\partial t^2}}_{c^2 \frac{\partial^2 H_i^n}{\partial x^2}} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (1.3)$$

Hier werden die Advektionsgleichung (1.1) und die Wellengleichung verwendet, um Zeitableitungen durch Ortsableitungen zu ersetzen. Approximation der Ortsableitungen durch Differenzenquotienten führt auf Finite-Differenzen-Methoden.

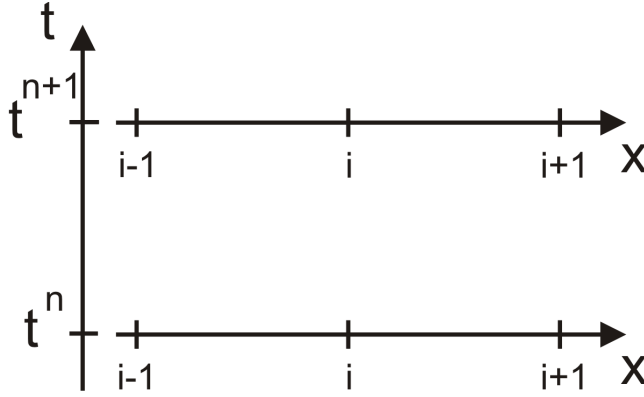


Abbildung 1: Orts- und Zeitdiskretisierung.

### 1.2.1 Upwind-Verfahren

Das Upwind-Verfahren verwendet nur den Term 1. Ordnung aus der Taylor-Entwicklung (1.3). Nächstliegend wäre, diesen zentriert zu approximieren, d.h.  $\partial H_i^n / \partial x = (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) / 2$ . Allerdings ist das resultierende Verfahren instabil [ÜA4]. Ein stabiles Verfahren lässt sich durch Diskretisierung entgegen der Strömungsrichtung (Upwind) erzielen. Für  $c > 0$  ist dann

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + c \frac{H_i^n - H_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (1.4)$$

Abbildung 2(a) illustriert das typische Verhalten einer numerischen Lösung aus dem Upwind-Verfahren. Gezeigt ist die Lösung eines *Riemann-Problems*, d.h. einer Diskontinuität in der Anfangsbedingung  $H_0(x)$ . Das Upwind-Verfahren verschiebt nicht nur die Anfangsbedingung, sondern schmiert sie zusätzlich aus.

Was passiert hier? Setzen wir die Taylor-Entwicklung (1.3) in die Upwind-Diskretisierung (1.10) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{H_i^n + \frac{\partial H_i^n}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_i^n}{\partial t^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) - H_i^n}{\Delta t} \\ & + c \frac{H_i^n - (H_i^n - \frac{\partial H_i^n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_i^n}{\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3))}{\Delta x} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Terme ohne Ableitungen streichen sich gegenseitig raus. (1.5) lässt sich umformen zu

$$\frac{\partial H_i^n}{\partial t} + c \frac{\partial H_i^n}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\Delta t \frac{\partial^2 H_i^n}{\partial t^2}}_{c^2 \frac{\partial^2 H_i^n}{\partial x^2}} - c \Delta x \frac{\partial^2 H_i^n}{\partial x^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (1.6)$$

Verwendung der Wellengleichung ergibt schließlich die sogenannte *Modifizierte*

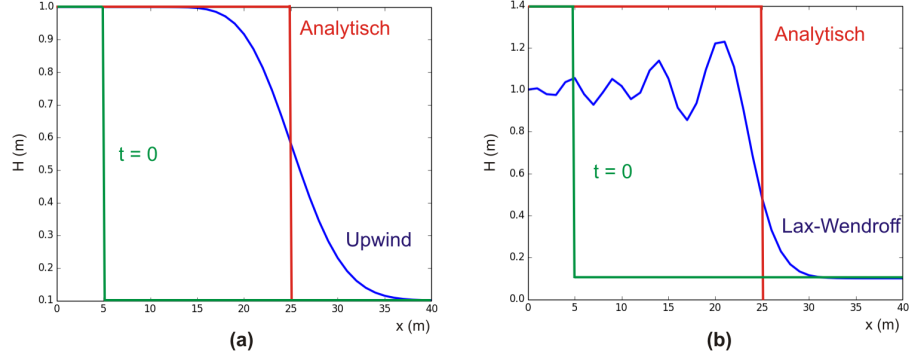


Abbildung 2: Lösung eines Riemann-Problems zur Advektionsgleichung ( $c = 1$  m/s,  $\Delta x = 1$  m,  $\Delta t = 0.1$  s) zur Simulationszeit  $t = 20$  s mit dem (a) Upwind-Verfahren (1.10) und (b) dem Lax-Wendroff-Verfahren (1.13).

Gleichung zum Upwind-Verfahren

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + c \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{c\Delta x}{2}(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (1.7)$$

Die Lösung aus dem Upwind-Verfahren in Abbildung 2(a) ähnelt mehr der Lösung  $\tilde{H}$  der modifizierten Gleichung (1.7) als der Lösung (1.2) der Advektionsgleichung. Glg. (1.7) enthält einen Diffusionsterm, der aus den Grundwasser-, oder Transportgleichungen bekannt ist. Er verschmiert die Lösung in Abbildung 2(a). Da das numerische Verfahren die Verschmierung oder Diffusion erzeugt, wird sie *numerische Diffusion* genannt. Glg. (1.7) wird die *CFL-Zahl* (Courant-Friedrichs-Lewy)

$$\sigma := \frac{c\Delta t}{\Delta x}. \quad (1.8)$$

verwendet. Für  $\sigma < 0$  oder  $\sigma > 1$  ist der Diffusionsterm negativ, d.h. die Lösung explodiert. Anders ausgedrückt: Das Verfahren ist instabil. Eine *notwendige Bedingung für Stabilität* mit der Diskretisierung (1.4) ist also

$$0 \leq \sigma \leq 1. \quad (1.9)$$

Das Upwind-Verfahren lässt sich

$$H_i^{n+1} = \begin{cases} H_i^n + \sigma (H_i^n - H_{i-1}^n) & \text{für } \sigma \geq 0 \\ H_i^n + \sigma (H_{i+1}^n - H_i^n) & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.10)$$

schreiben. Durch Anpassung der Diskretisierung (1.4) gemäß der Strömungsrichtung ist das Verfahren stabil für  $-1 \leq \sigma \leq 1$ .

### 1.2.2 Lax-Wendroff-Verfahren

Das Lax-Wendroff-Verfahren approximiert den Term 1. Ordnung in der Taylor-Entwicklung zentriert. Dazu kommt die Diskretisierung des Termes 2. Ordnung:

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{c}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{c^2}{2} \frac{H_{i+1}^n - 2H_i^n + H_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.11)$$

Abbildung 2(b) zeigt die Lösung des Lax-Wendroff-Verfahrens zu einem Riemann-Problem. Die Lösung zeigt keine Diffusion, allerdings folgen Oszillationen der Diskontinuität. Die modifizierte Gleichung findet sich wieder durch Einsetzen der Taylor-Entwicklung (vgl. mit (1.5)). Sie lautet

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + c \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{c\Delta x^2}{\sigma} (\sigma^2 - 1) \frac{\partial^3 \tilde{H}}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (1.12)$$

Ein Term 3. Ordnung taucht auf. Er nennt sich Dispersionsterm und erzeugt Oszillationen. Das Lax-Wendroff-Verfahren schreibt sich

$$\boxed{H_i^{n+1} = H_i^n + \frac{\sigma}{2} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2} (H_{i+1}^n - 2H_i^n + H_{i-1}^n)} \quad (1.13)$$

und ist stabil für

$$-1 \leq \sigma \leq 1. \quad (1.14)$$

**Merke:** Explizite numerische Verfahren unterliegen stets solch einer Stabilitätsbedingung (vgl. mit (1.9)). Sie wird auch *CFL-Bedingung* genannt und spielt eine wesentliche Rolle in *Zeitschrittsteuerungen*. Wird (1.14) umgeformt zu  $\Delta t \leq |\sigma \Delta x / c|$ , besagt die Bedingung: Je feiner das Gitter, desto kleiner die Zeitschrittweite  $\Delta t$ .

## Übungsaufgaben

1. Wie lautet die Lösung der Advektionsgleichung für die Anfangsbedingung einer Sinuswelle  $H_0(x) = \sin(kx)$  ( $k = 2\pi/\lambda$  is Wellenzahl,  $\lambda$  Wellenlänge)? Zeigen Sie dies durch Einsetzen der Lösung in die Advektionsgleichung (1.1).
2. Notieren sie die Upwind-Diskretisierung der Advektionsgleichung (1.1) für den Fall  $c < 0$ .
3. Wie verhält sich die Lösung der Advektionsgleichung zum Upwind-Verfahren für den Spezialfall  $\sigma = 1$ ?
4. Bestimmen Sie die Modifizierte Gleichung zum Verfahren

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = c \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (1.15)$$

mit zentrierter Ortsableitung. Welche Art von Term entsteht dabei? Was sagt er über die Stabilität des Verfahrens aus?

5. Die Advektionsgleichung verschiebt eine Lösung in jedem Zeitschritt um  $c\Delta t$ .  $H_i^{n+1}$  entstammt also aus einem bestimmten Raumpunkt  $x$  zum vorherigen Zeitschritt  $n$ . Aus welchem Bereich  $x$  im Ortsgitter zum Zeitpunkt  $t^n$  muss die Lösung entstammen, so dass die Upwind-Diskretisierung (1.4) für  $c > 0$  zu einem stabilen Verfahren führt? Markieren Sie diesen Bereich in Abbildung 1.
6. Um welchen Faktor verringert sich die maximal erlaubte Zeitschrittweite bei der Lösung der Advektionsgleichung mit dem Upwind- oder Lax-Wendroff-Verfahren, wenn die Gitterweite  $\Delta x$  halbiert wird?

## 2 Kinematische Wellengleichung

Die kinematische Wellengleichung ist nicht-linear im Gegensatz zur Advektionsgleichung. Nicht-lineare hyperbolische Gleichungen bilden stets Schocks (Diskontinuitäten). Im vorherigen Abschnitt 1 wurden die Upwind- und Lax-Wendroff-Verfahren über die Finite-Differenzen-Methode eingeführt. Die Verfahren erhalten eine geometrische Interpretation in der Finite-Volumen-Methode. Sie gewährleisten die Massenerhaltung und können Schocks in den Lösungen (näherungsweise) korrekt wiedergeben.

**Wichtig zu merken:** Verfahren 1. Ordnung sind diffusiv und Verfahren 2. Ordnung sind dispersiv. Letztere zeigen Oszillationen an Diskontinuitäten (Siehe auch Abbildung 2).

### 2.1 Grundgleichung

Die Massenbilanz in einer Dimension ist durch

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

gegeben, wobei  $H$  die Wassertiefe,  $q = Hu$  die Fließrate und  $u$  die tiefengemittelte Fließgeschwindigkeit ist. Es wird eine weitere Gleichung benötigt. Verwendet wird eine Fließformel als konstitutive Gleichung, d.h. sie schließt die Bilanzgleichung (2.1). Gängig sind folgende

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n} S_0^{1/2} H^{2/3} && \text{(nach Manning für turbulente Gerinneströmungen),} \\ u &= \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} S_0^{1/2} H^{1/2} && \text{(nach Darcy-Weisbach für Rohrströmungen),} \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei  $n$ ,  $\lambda$  Reibungsparameter und  $S_0$  das Gefälle sind. Die Gln. (2.2) besagen, um welchen „Stoff“ es geht. Daher heißen sie auch Stoffgesetze. Die Fließformeln beschreiben Reibungseffekte, die durch die Gerinnesohle oder Rohrrinnen-seite erzeugt werden. Verwendung der Kettenregel führt auf die kinematische

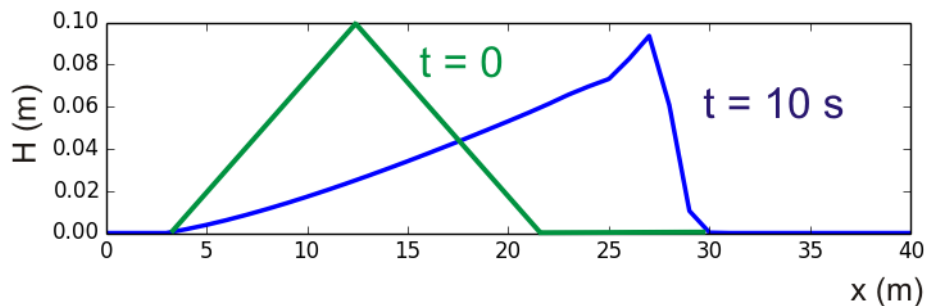


Abbildung 3: Kinematische Welle ( $n = 0.02 \text{ s/m}^{1/3}$ , berechnet mit der Upwind-Finite-Volumen-Methode (2.4)).

Wellengleichung

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} + c_{kin} \frac{\partial H}{\partial x} = 0}, \quad (2.3)$$

wobei  $c_{kin} = \partial q / \partial H$  die *Geschwindigkeit der kinematischen Welle* ist, z.B.  $c_{kin} = 5/3 u$  bei Verwendung der Manning-Beziehung. Die Geschwindigkeit der kinematischen Welle hängt von der Wassertiefe  $H$  ab. Abbildung 3 zeigt eine Lösung der kinematischen Wellengleichung. Es bildet sich eine *Schockwelle* (Diskontinuität).

## 2.2 Finite-Volumen-Methoden

Wir gehen direkt von der Massenbilanz (2.1) aus und interpretieren  $H_i^n$  als Zellenmittelwert von  $H(x, t)$  (Abbildung 4). Die Zelle ist ein *Kontrollvolumen*, dessen Inhalt sich durch Flüsse an den Rändern  $q_{i+1/2}^n$  ändert

$$H_i^{n+1} = H_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i+1/2}^n - q_{i-1/2}^n). \quad (2.4)$$

Finite-Volumen-Methoden approximieren den Fluss am Zellrand

$$q_{i+1/2}^n = \tilde{H}_{i+1/2}^n \bar{u}_{i+1/2}^n. \quad (2.5)$$

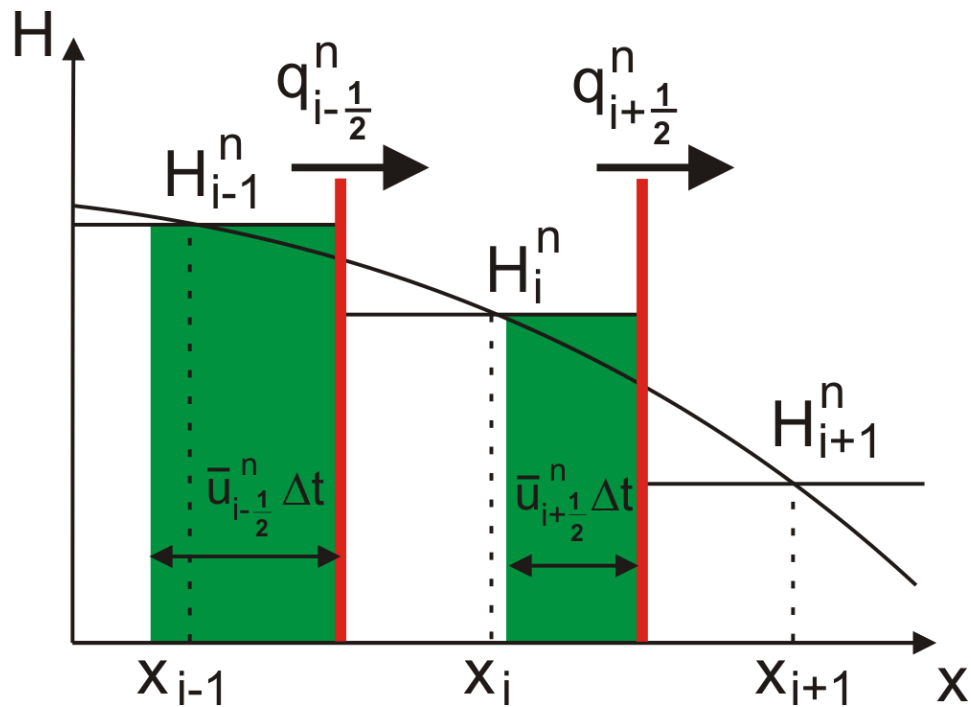


Abbildung 4: Kontrollvolumen mit Upwind-Flüssen.



Mit der gemittelten Geschwindigkeit  $\bar{u}_{i+1/2}^n = (u_i^n + u_{i+1}^n)/2$  und

$$\tilde{H}_{i+1/2}^n = \begin{cases} H_i^n + \frac{1}{2}(1 - \bar{u}_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) \Delta H_i^n & \bar{u}_{i+1/2} > 0 \\ H_{i+1}^n - \frac{1}{2}(1 + \bar{u}_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) \Delta H_{i+1}^n & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

lassen sich einige Verfahren über die Steigung

$$\Delta H_i^n = \begin{cases} 0 & \text{Upwind} \\ H_{i+1}^n - H_i^n & \text{Lax-Wendroff (Downwind Steigung)} \\ H_i^n - H_{i-1}^n & \text{Beam-Warming (Upwind Steigung)} \\ H_{i+1}^n - H_{i-1}^n & \text{Fromm (Zentrierte Steigung)} \end{cases} \quad (2.7)$$

notieren. Beim Upwind-Verfahren wird die Lösung  $H(x, t^n)$  in einem Kontrollvolumen  $i$  durch einen konstanten Wert  $H(x_i, t^n)$  interpoliert (Abbildung 4). In jedem Zeitschritt  $\Delta t$  wird der Massenanteil  $\bar{u}_{i-1/2}^n \Delta t$  in das Kontrollvolumen  $i$  hinein und  $\bar{u}_{i+1/2}^n \Delta t$  aus dem Kontrollvolumen  $i$  hinausverschoben.

Das Upwind-Verfahren ist von 1. Ordnung. Werden Steigungen zur Interpolation verwendet, z.B. die Downwind-Steigung beim Lax-Wendroff-Verfahren [ÜA 3], ergibt sich ein numerisches Verfahren 2. Ordnung. Sie zeigen allerdings Oszillationen an Diskontinuitäten. Abb. 5(a) zeigt die Entstehung einer Oszillation hinter einer Diskontinuität beim Lax-Wendroff-Verfahren. Aus Zelle  $i$  fließt weniger Wasser raus als rein und es kommt zu einem *Overshooting*. Beim Beam-Warming-Verfahren führt ein *Undershooting* in Zelle  $i + 1$  zu einer Oszillation vor der Diskontinuität (Abb. 5(b)).

Mittels Slope-Limiter lassen sich numerische Verfahren konstruieren, die in glatten Lösungsbereichen von 2. Ordnung sind und in ein Verfahren 1. Ordnung übergehen, sobald Oszillationen entstehen. Ein Beispiel ist

$$\Delta H_i = \text{minmod}(H_{i+1} - H_i, H_i - H_{i-1}) \quad (2.8)$$

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{wenn } |a| < |b|, ab > 0 \\ b & \text{wenn } |b| \leq |a|, ab > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.9)$$

Sind die Steigungen in zwei angrenzenden Kontrollvolumen entgegengesetzt (letzter Fall in (2.9)), wird durch Upwind-Diskretisierung die Lösung geglättet.

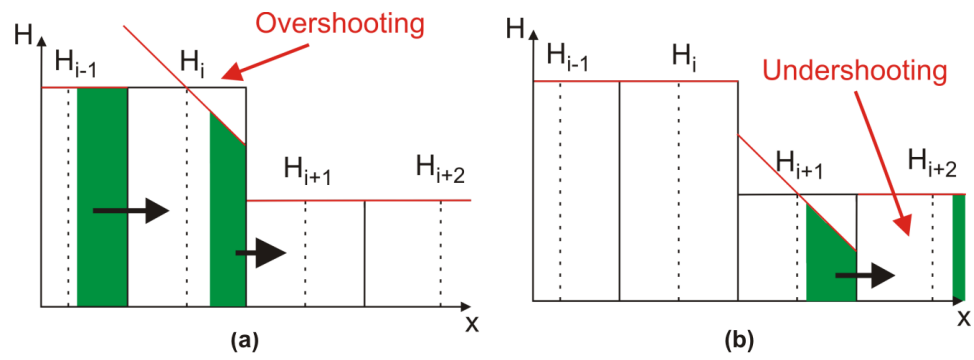


Abbildung 5: Entstehung von Oszillationen beim (a) Lax-Wendroff-Verfahren und (b) Beam-Warming-Verfahren.

## Übungsaufgaben

1. Für laminare Strömungen gilt für den Reibungsparameter  $\lambda = 64/Re$  mit der Reynolds-Zahl  $Re = Hu/\nu$  und der dynamischen Viskosität  $\nu$ . Welche Geschwindigkeit hat eine kinematische Welle in einer laminaren Rohrströmung? Vergleichen Sie diese mit der Fließgeschwindigkeit  $u$ .
2. Skizzieren Sie die Interpolation im Lax-Wendroff-Verfahren (Glg. 2.7) in Zelle  $i$  in Abbildung 4.
3. Zeigen Sie, dass Verwendung der Downwind-Steigung bei einer Finite-Volumen-Diskretisierung der Advektionsgleichung (1.1) zum Lax-Wendroff-Verfahren in der Form führt (1.13).
4. Welches Verhalten erwarten Sie für die Lösung des Fromm-Verfahrens an Diskontinuitäten. Machen Sie eine Skizze wie Abbildung 5.
5. Skizzieren Sie die Steigungen an einer Diskontinuität wie in Abbildung 5 bei Verwendung des Minmod-Slope-Limiters (2.9). Vergleichen Sie die Flüsse an den Zellgrenzen mit denen des Upwind-Verfahrens.
6. **(Nicht Klausurrelevant)**  
Die Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H^2/2}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

beschreibt einfache akustische Wellen mit dem Fluss  $q = H^2/2$  in der Massenbilanz.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit  $c_{Burger}$  bewegen sich die Wellen?

(b) Betrachten Sie eine Diskontinuität  $H_{i-1}^n = 2$ ,  $H_i^n = 1$ . Berechnen und vergleichen Sie die Lösungen  $H_i^{n+1}$  am Raumpunkt  $x_i$  aus der Upwind-Finite-Differenzen-Diskretisierung

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + H_{i-1}^n \frac{H_i^n - H_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (2.11)$$

und der Upwind-Finite-Volumen-Diskretisierung

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(H_i^n)^2 - (H_{i-1}^n)^2}{\Delta x} = 0. \quad (2.12)$$

für einen Zeitschritt. Wählen Sie  $\Delta t/\Delta x = 1$  als Diskretisierung. Welches Verfahren ist masseerhaltend, welches nicht?