

# Hydroinformatik II

## ”Prozesssimulation und Systemanalyse”

### BHYWI-08-12 @ 2020

#### Grundwasserhydraulik, Prinzip-Beispiel

Olaf Kolditz

\*Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ

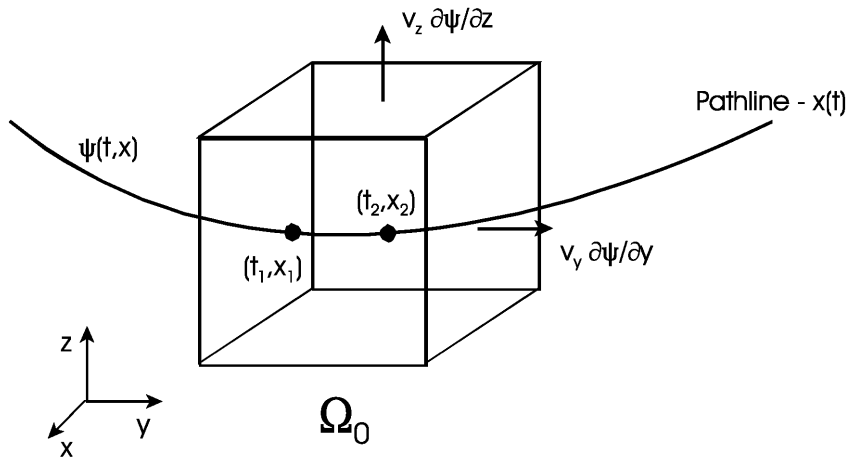
<sup>1</sup>Technische Universität Dresden – TUDD

<sup>2</sup>Centre for Advanced Water Research – CAWR

10.07.2020 - Dresden

- ▶ Grundlagen (kurze Wiederholung)
- ▶ Grundwassergleichung
- ▶ Prinzip-Beispiel
- ▶ Bilanzierung
- ▶ Berechnungsverfahren
- ▶ Lösung
- ▶ Übung HSA1: Programmierung für Prinzip-Beispiel

# Das Euler Prinzip (Wdh)



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

with  $u = v_x$ ,  $v = v_y$ ,  $w = v_z$  and  $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$ .

# Flow Equations - Systematic (Wdh)

Stress Tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

Navier-Stokes Equation

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}} \quad (4)$$

Euler Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

Stokes Equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (6)$$

Darcy Equations

$$0 = \mathbf{f}^e - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (7)$$

$$\frac{\partial n\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (n\rho\mathbf{v}) = Q_\rho \quad (8)$$

Für ein inkompressibles Fluid gilt dann (PF)

$$\rho \frac{\partial n}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Q_\rho \quad (9)$$

oder noch besser

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = \frac{Q_\rho}{\rho_0} \quad (10)$$

In der Grundwasserhydraulik gilt

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

$$n\mathbf{v} = \mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla h \quad (\text{Darcy Gesetz}) \quad (12)$$

Dabei sind:  $S$  der Speicherkoeffizient,  $h$  die Piezometer- oder hydraulische Höhe,  $\mathbf{q}$  die Darcy- oder Filtergeschwindigkeit und  $\mathbf{K}$  der hydraulische Leitfähigkeitstensor.

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Q$$

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) = Q$$

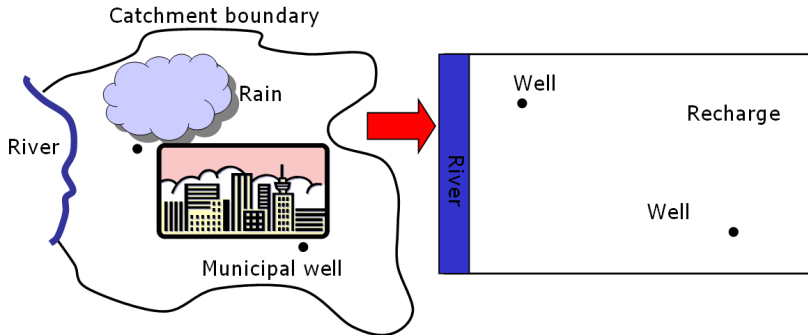
$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = Q$$

Wir begnügen uns mit einem 2-D horizontalen Modell.

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = Q \quad (13)$$



# Prinzip-Beispiel



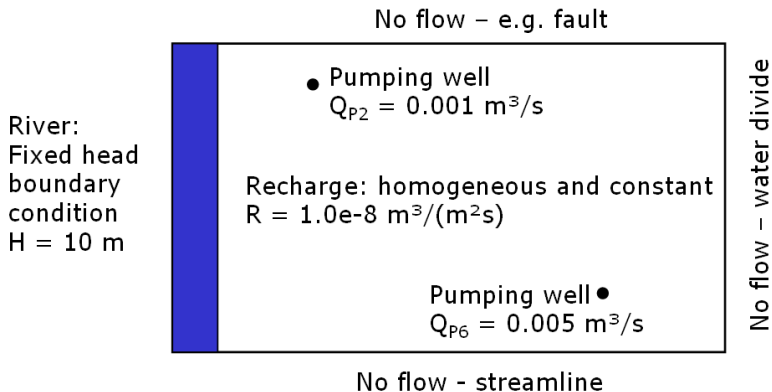


Figure: Definition der Randbedingungen

# Prinzip-Beispiel

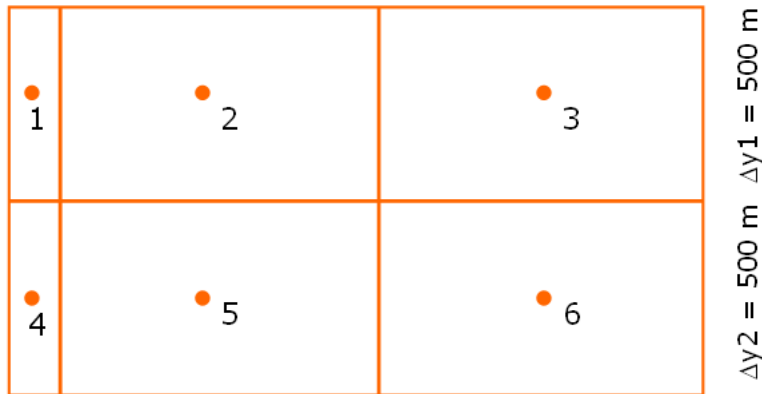


Figure: Bilanzierungs-Schemata

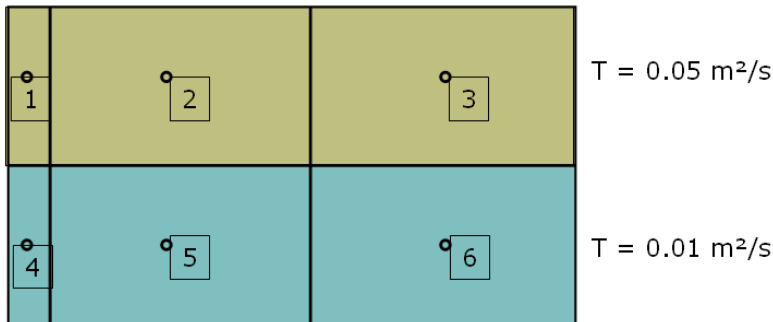


Figure: Definition der Materialgruppen

$$T = \frac{K}{S} \quad (14)$$

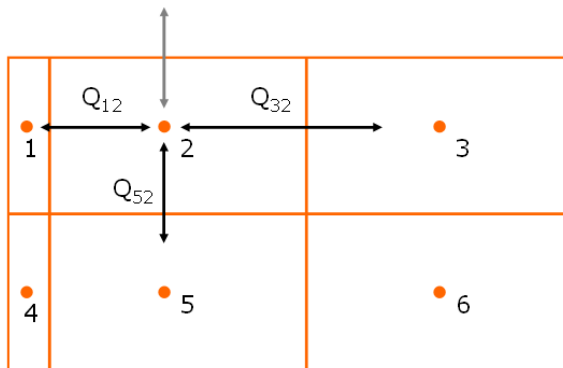


Figure: Knoten-Bilanz aufstellen

$$Q_{12} + Q_{32} + Q_{52} + Q_R + Q_{P2} = 0$$

Wir benutzen folgendes Differenzenschema.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_i - h_j}{x_i - x_j} \quad (16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_i - h_j}{y_i - y_j} \quad (17)$$

Da unser FD-Gitter weder equidistant und unser Aquifer noch heterogen ist, schreiben wir besser.

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{12} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta x_1/2 + \Delta x_2/2} \quad (18)$$

- ▶ Berechnung von (hydraulischen) Widerständen - harmonisches Mittel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- ▶ Transmissivität

$$T_{25} = \frac{\Delta y_2 + \Delta y_5}{\Delta y_2 / T_2 + \Delta y_5 / T_5}$$

$$T_{23} = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta x_2 / T_2 + \Delta x_3 / T_3}$$

$$Q_x = \Delta y T_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

Damit können wir für die Flussterme schreiben.

$$Q_{12} = \Delta y_1 \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1/T_1 + \Delta x_2/T_2} \times \frac{h_1 - h_2}{\Delta x_1/2 + \Delta x_2/2} \quad (19)$$

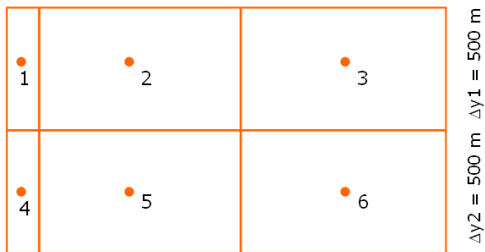
$$Q_{52} = \Delta x_2 \frac{\Delta y_5 + \Delta y_2}{\Delta y_5/T_5 + \Delta y_2/T_2} \times \frac{h_5 - h_2}{\Delta y_5/2 + \Delta y_2/2} \quad (20)$$

$$Q_{32} = \Delta x_2 \frac{\Delta x_3 + \Delta x_2}{\Delta x_3/T_3 + \Delta x_2/T_2} \times \frac{h_3 - h_2}{\Delta x_3/2 + \Delta x_2/2} \quad (21)$$

- ▶ Tafelbild



# Prinzip-Beispiel



$$\Delta x_1 = 100 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = 1000 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = 1000 \text{ m}$$

Die Zahlen eingesetzt ergibt sich für

$$Q_{12} = 0.454545 - 0.0454545h_2$$

$$Q_{52} = 0.033333h_5 - 0.033333h_2$$

$$Q_{32} = 0.02500h_3 - 0.02500h_2$$

$$Q_R = R\Delta x_2\Delta y_1 = 0.005$$

$$Q_{P2} = -0.001$$

- ▶ Bilanzgleichungen für alle Zellen (2,3,4,5):

$$\begin{aligned}2 : 0.458545 - 0.103788h_2 + 0.025h_3 + 0.03333h_5 &= 0 \\3 : 0.0050 + 0.0250h_2 - 0.0583h_3 + 0.0333h_6 &= 0 \\5 : 0.0959 + 0.0333h_2 - 0.0474h_3 + 0.0050h_6 &= 0 \\6 : 0.0000 + 0.0333h_3 + 0.0050h_5 - 0.0383h_6 &= 0\end{aligned}\quad (23)$$

- ▶ Gleichungssystem lösen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (24)$$

Ergebnis:

$$h_1 = 10.00$$

$$h_2 = 10.24$$

$$h_3 = 10.41 \quad (25)$$

$$h_4 = 10.00$$

$$h_5 = 10.31$$

$$h_6 = 10.39$$

(26)

- ▶ Gauss-Seidel Verfahren
- ▶ Umstellung des Gleichungssystems

$$h_2 = 0.2408h_3 + 0.3211h_5 + 4.4181$$

$$h_3 = 0.4285h_2 + 0.5714h_6 + 0.0857$$

$$h_5 = 0.7028h_2 + 0.1054h_6 + 2.0223$$

$$h_6 = 0.8695h_3 + 0.1304h_5$$

- ▶ Konstruktion eines iterativen Lösungsverfahrens
- ▶ Pro: Es muss kein Gleichungssystem gelöst werden.
- ▶ Con: Es kann auch mal nicht klappen (keine Konvergenz).

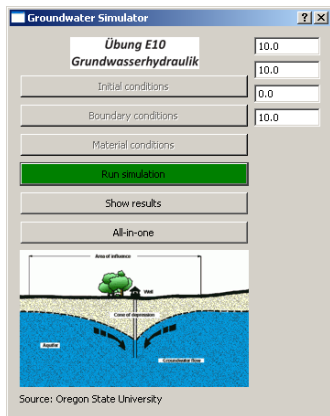
$$h_{2,i+1} = 0.2408h_{3,i} + 0.3211h_{5,i} + 4.4181$$

$$h_{3,i+1} = 0.4285h_{2,i} + 0.5714h_{6,i} + 0.0857$$

$$h_{5,i+1} = 0.7028h_{2,i} + 0.1054h_{6,i} + 2.0223$$

$$h_{6,i+1} = 0.8695h_{3,i} + 0.1304h_{5,i}$$

```
void Dialog::GaussSeidel()
{
    for(int k=0;k<solver_iterations;k++)
    {
        x[1] = 0.2408 * x[2] + 0.3211 * x[4] + 4.4181;
        x[2] = 0.4285 * x[1] + 0.5714 * x[5] + 0.0857;
        x[4] = 0.7028 * x[1] + 0.1054 * x[5] + 2.0223 ;
        x[5] = 0.8695 * x[2] + 0.1304 * x[4];
        TestOutput(x);
    }
}
```



Eigenes MatLab ...

- ▶ Funktions-Simulator
- ▶ FDM Simulator (explizit und implizit)
- ▶ Newton Simulator
- ▶ ... alles noch 1D, schau'n wir mal (Systemanalyse)
- ▶ 2D FDM Grundwassersimulator

# Übung HSA#1 - Ausblick

