

Hydroinformatik II

”Prozesssimulation und Systemanalyse”

HyBHW-1-02-10 @ 2021

Gerinnehydraulik - Grundlagen

Olaf Kolditz

*Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ

¹Technische Universität Dresden – TUDD

²Centre for Advanced Water Research – CAWR

25.06.2021 - Dresden

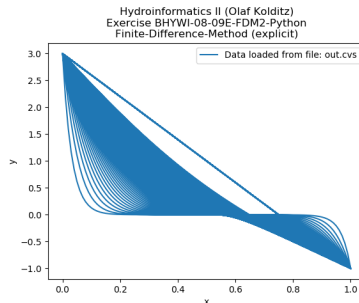
Zeitplan: Hydroinformatik II

Datum	V	Thema	T
16.04.2021	01	Einführung in die Lehrveranstaltung Tools	L
23.04.2021	02	Grundlagen: Kontinuumsmechanik	L
30.04.2021	03	Grundlagen: Hydromechanik	L
07.05.2021	04	Grundlagen: Partielle Partialgleichungen	L
14.05.2021	05a	Tools: Compiler, Python, Jupyter	E
14.05.2021	05b	Übung: Elliptische PDG	E
21.05.2021	06	Übungen: Übersicht und Werkzeuge	E
28.05.2021	–	Pfingsten	
04.06.2021	07	Grundlagen: Näherungsverfahren	L
11.06.2021	08	Numerik: Finite-Differenzen-Methode (explizit)	L
18.06.2021	09	Numerik: Finite-Differenzen-Methode (implizit)	L
25.06.2021	10	Grundlagen: Gerinnehydraulik	L
02.07.2021	11	Übung: Diffusionsprozesse	E
09.07.2021	12	Übung: Gerinnehydraulik	E
16.07.2021	13	Übung: Grundwassermodellierung	E
23.07.2021	14	Beleg: Besprechung zur Vorbereitung	L

Letzte Vorlesung: Übung: Implizite FDM mit Python

```
Qt 5.12.0 for Desktop (MinGW 7.3.0 64 bit) - run
Setting up environment for Qt usage...
C:\Qt\5.12.0\mingw73_64>cd C:\User\02_TUD\23_SoSe2020\BHYWI-08\EXERCISES\BHYWI-08-03-E-Python
C:\User\02_TUD\23_SoSe2020\BHYWI-08\EXERCISES\BHYWI-08-03-E-Python>run
Compilation
Execution
Plotting
```

- ▶ Qt Installation (C++ Compiler und Konsole)
- ▶ Python Installation (weitere Pakete laden, matplotlib)

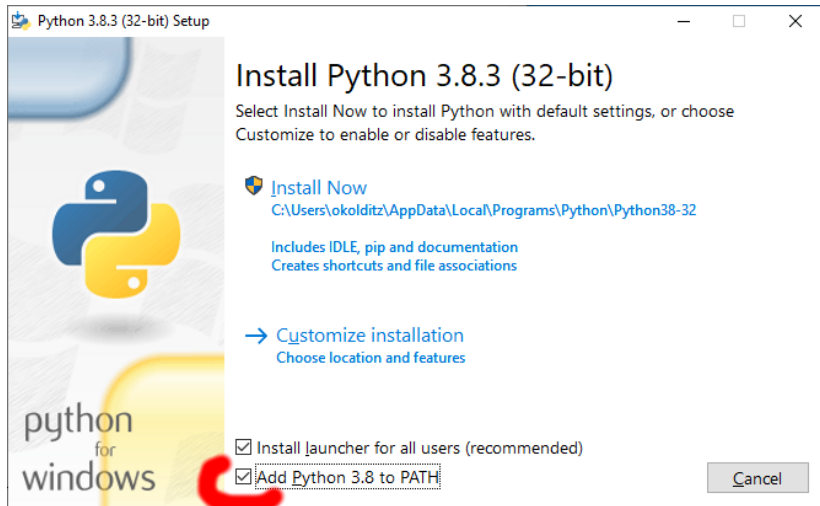


Repository:

<https://github.com/OlafKolditz/Hydroinformatik-II>

- ▶ Namen/Matrikelnummer in den Plot eintragen
- ▶ Rechnungen mit größeren Zeitschritten (bis zur stationären Lösung) ausführen und plotten

Python Installation: Tipps & Tricks



- 1 Abfallwirtschaft / Wärmeversorgung: Diffusionsprozesse
- 2 **Hydrology: Gerinnehydraulik (→ this)**
- 3 Grundwasserwirtschaft: Grundwasserhydraulik (→ next)

- 1 Gerinnehydraulik: Parameter, Symbole ...
- 2 Energieerhaltung: Bernoulli-Gleichung
- 3 Impulserhaltung: Saint-Venant-Gleichungen
- 4 Lösung der Bernoulli-Gleichung
- 5 Newton-Verfahren
- 6 \mapsto numerisches Lösungsverfahren (nächste Veranstaltung)

Für die Beschreibung von Strömungsprozessen in Flüssen (d.h. Gerinne) gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten basierend auf den sogenannten Bernoulli (Energiebetrachtung) oder Saint-Venant Gleichungen. Wir verwenden die erste für die Implementierung in C++ (Bildquellen: Technische Hydromechanik).



- ▶ History
- ▶ gelebt 1700-1782
- ▶ Freund von L Euler
- ▶ Bernoulli Gleichung
- ▶ kinetische Theorie der Gase
- ▶ russ. Akademie Petersburg
- ▶ Vater/Sohn Beziehung

Bernoulli-Gleichung #1

$$z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\rho g} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad (1)$$

- ▶ Symbole
- ▶ Gesetz von Darcy-Weisbach für streckenabhängige Verluste

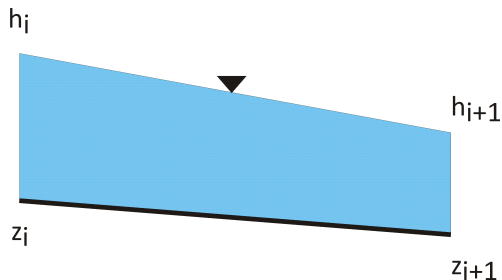
$$h_f = \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

- ▶ Symbole (Zusammenfassung später)
- ▶ Gesetz von Darcy-Weisbach für streckenabhängige Verluste

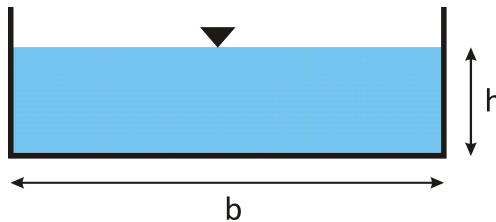
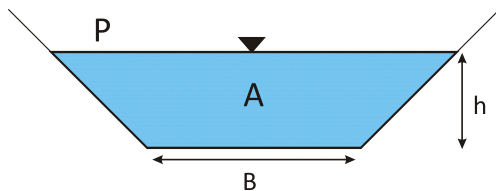
$$d_{hy} = 4r_{hy} = 4 \frac{A}{P} \quad (3)$$

$$p = \rho gh \quad (4)$$

$$z_{i+1} + h_{i+1} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + h_i + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad , E = h + \frac{v^2}{2g} \quad (5)$$



Channel Geometry



► Durchfluss

$$Q = A v = b h v \quad (6)$$

$$z_{i+1} + h_{i+1} + \frac{Q_{i+1}^2}{2g b^2 h_{i+1}^2} = z_i + h_i + \frac{Q_i^2}{2g b^2 h_i^2} + h_f \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \quad (8)$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

with $u = v_x$, $v = v_y$, $w = v_z$ and $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$.

- ▶ History
- ▶ gelebt 1797-1886
- ▶ 1D open channel flow
- ▶ shallow water equations (Flachwassergleichungen)
- ▶ Stokes equation (is his)
- ▶ Engineer
- ▶ Count

Saint-Venant-Gleichungen #1

- ▶ Saint-Venant-Gleichungen
- ▶ Vertikal gemittelte Navier-Stokes-Gleichung
- ▶ 2D Flachwasser-Gleichungen (Filmchen)
- ▶ Mittelung über die Querschnittsfläche
- ▶ 1D Gerinnehydraulik
- ▶ Fließgeschwindigkeit $v = Q/A$ in Flußrichtung

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \frac{Q}{A} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2A^2} + gh(x, A) \right) = g(S_o - S_f) \quad (11)$$

- ▶ Stationäre Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (A(x, h)v) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} + gh(x, A) \right) &= g(S_o - S_f)\end{aligned}\quad (12)$$

unter Verwendung der Primärvariablen A und Q

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q(h)^2}{2A(h)^2} + gh(x, A) \right) = g(S_o - S_f)\quad (13)$$

- ▶ Nichtlineare Gleichung

Symbol	Parameter	Englisch	Einheit
h	Wasserspiegel	water surface elevation	m
i	Sohlenspiegel	channel datum	m
z	Wassertiefe	water depth	m
Z_L, Z_R	linke / rechte Böschung	left / right channel slope	m
Q	Durchfluss	discharge	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
A	Querschnittsfläche	channel cross-section	m^2
B	Breite	channel width	m^2
P	benetzter Umfang	wetted perimeter	m
R, r_{hy}	hydraulische Radius	hydraulic radius	m
U	stromaufwärts	upstream	-
D	stromabwärts	downstream	-
Δx	Abstand zwischen U und D	distance between U and D	m
h_v	kinetische Energie	velocity head	m
h_f	Reibungsverluste	friction head	m
S_o	Sohlgefälle	bed slope	-
S_f	Streckenverlust	friction slope	-

$$z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\rho g} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad (14)$$

$$h_f = \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (15)$$

$$d_{hy} = 4r_{hy} = 4 \frac{A}{P} \quad (16)$$

Energiebetrachtung #2: Bernoulli/Saint-Venant

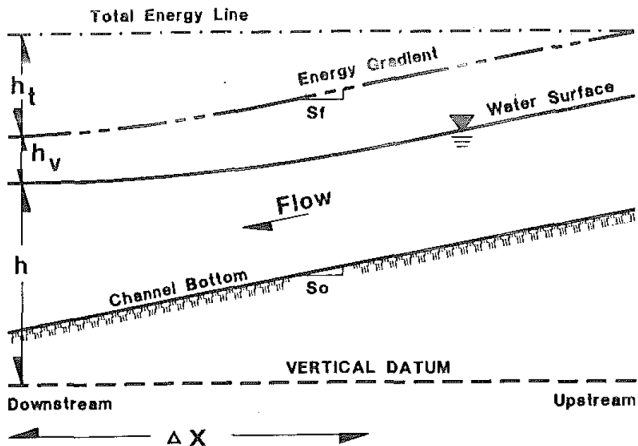


Figure: Fließprofil im Gerinne Paine (1992)

Energiebetrachtung #3: Bernoulli

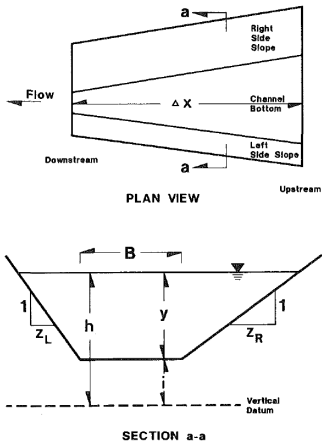


Figure: Trapezgerinne Paine (1992)

$$y \equiv z$$

Energiebetrachtung #4 Geometrie

- ▶ Die trapezoide Querschnittsfläche des Gerinnes kann folgendermaßen berechnet werden (Abb. 2).

$$A = y \left[B + \frac{Z_L + Z_R}{2} \right] \quad (17)$$

- ▶ Der benetzte Umfang des Gerinnes ist.

$$P = B + y \left[\sqrt{1 + Z_L^2} + \sqrt{1 + Z_R^2} \right] \quad (18)$$

- ▶ Der hydraulische Radius ergibt sich dann als:

$$R = \frac{A}{P} \quad (19)$$

- ▶ Letztlich benötigen wir noch den Zusammenhang von Fließgeschwindigkeit und Durchfluss.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{y \left[B + \frac{Z_L + Z_R}{2} \right]} \quad (20)$$

Die Streckenverluste lassen sich nach Manning wie folgt beschreiben

$$S_f = \left(\frac{Q}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (21)$$

$$S_f = Q^2 A^{-2} R^{-4/3} \quad (22)$$

mit

$$R = \frac{y(B + C_4)}{B + yC_5} \quad (23)$$

$$C_4 = \frac{Z_L + Z_R}{2} \quad (24)$$

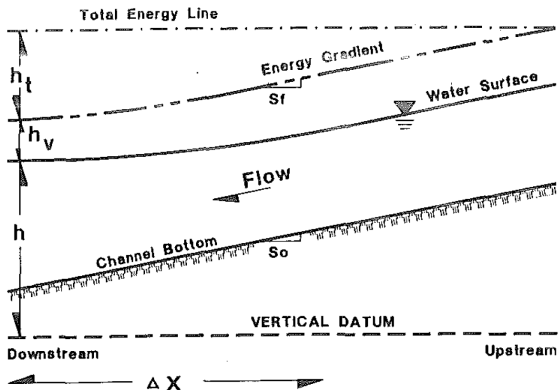
$$C_5 = \sqrt{1 + Z_L^2} + \sqrt{1 + Z_R^2} \quad (25)$$

$$S_f = Q^2 (y(B + C_4))^{-2} \left(\frac{y(B + C_4)}{B + yC_5} \right)^{-4/3} \quad (26)$$

$$S_f = Q^2 (By + C_4y)^{-2} (By + C_4y)^{-4/3} (B + C_5y)^{4/3} \quad (27)$$

$$S_f = Q^2 (By + C_4y)^{-10/3} (B + C_5y)^{4/3} \quad (28)$$

Lösung einer nichtlinearen Gleichung #1



$$f(h) = \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \Big|_D - \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \Big|_U + \Delta X \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} = 0 \quad (29)$$

$$f(h) = \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) |_D - \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) |_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} \quad (30)$$

$$f(h) = \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) |_D - \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) |_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} \quad (31)$$

- ▶ Konstruktion eines Newton-Verfahrens

$$h_{k+1} = h_k + \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} \quad (32)$$

Math: Newton-Verfahren #1

- ▶ Nichtlineare Gleichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (f(h) = 0) \quad (33)$$

- ▶ Residuum

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad (34)$$

- ▶ Taylor-Reihe

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \right]_k \Delta \mathbf{x}_{k+1} + 0(\Delta \mathbf{x}_{k+1}^2) \quad (35)$$

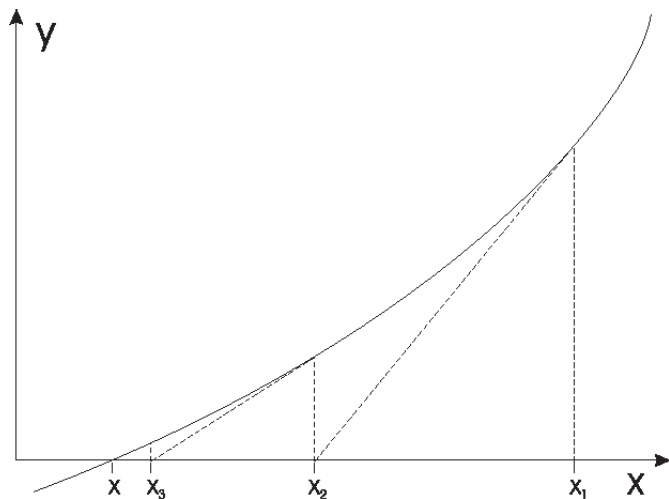
- ▶ Umstellen

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx -\mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{R}_k \quad (\mathbf{R}_{k+1} = 0) \quad (36)$$

- ▶ Lösungsvorschrift

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{R}_k$$

Math: Newton-Verfahren #2



$$y = R(x)$$

- ▶ Newton-Verfahren: $\mathbf{x} = h$

$$h_{k+1} = h_k + \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} = \frac{\mathbf{R}_k}{\mathbf{J}_k} \quad (38)$$

- ▶ $f'(h) = f'(y)$

$$\frac{d}{dh} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = 1 - \frac{Q^2}{2gA^3} \frac{dA}{dh} \quad (39)$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{d}{dh} (y(B + C_4)) = B + C_4 \quad (40)$$

Bleibt noch die Differenzierung der Streckenverluste

$$\frac{dS_f}{dh} = S'_f = \frac{d}{dh} \left(\frac{Q}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (41)$$

$$S'_f = \left[Q^2 (By + C_4y)^{10/3} \frac{4}{3} (B + C_5y)^{1/3} C_5 \right] + \left[(B + yC_5)^{4/3} \frac{-10Q^2}{3} (By + C_4y)^{13/3} (B + C_4) \right] \quad (42)$$

$$S'_f = \frac{4}{3} Q^2 C_5 (By + C_4y)^{-10/3} (B + C_5y)^{1/3} - \frac{10}{3} Q^2 (B + C_4) (B + C_5y)^{4/3} (By + C_4y)^{-13/3} \quad (43)$$