

Hydroinformatik II: Gerinnehydraulik

¹Helmholtz Centre for Environmental Research – UFZ, Leipzig

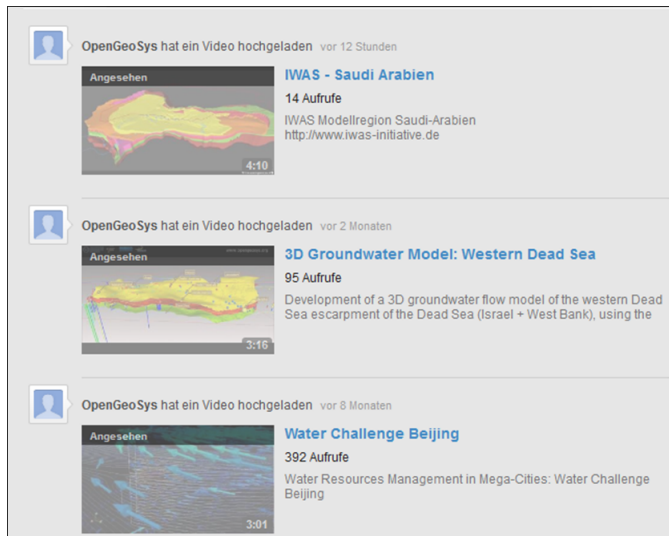
²Technische Universität Dresden – TUD, Dresden

Dresden, 19. Juni 2015

Vorlesungsplan Hydroinformatik II SoSe 2015

#	Datum	Thema
01	17.04.2015	Einführung, Grundlagen: Kontinuumsmechanik
02	24.04.2015	Grundlagen: Kontinuumsmechanik/Hydromechanik
-	01.05.2015	Maifeiertag
03	08.05.2015	HW: Einführung in Qt (Installation)
04	15.05.2015	Grundlagen: Partielle Differentialgleichungen / $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$
05	22.05.2015	Grundlagen: Numerische Methoden
-	29.05.2015	Pfingsten
06	05.06.2016	Numerik: (exp) Finite Differenzen Methode
07	12.06.2015	Numerik: (imp) Finite Differenzen Methode
08	19.06.2015	Gerinnehydraulik: Theorie - Grundlagen
09	26.06.2015	Gerinnehydraulik: Saint-Venant Gleichung (\implies HSA)
10	03.07.2015	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 1
11	10.07.2015	Gerinnehydraulik: Programmierung, Übung 2
12	17.07.2015	Kurs-Zusammenfassung und Abschluss

Nachtrag zur Christmas Lecture ... Science@YouTube



The screenshot displays a YouTube channel page for 'OpenGeoSys'. It features three video uploads, each with a thumbnail, title, view count, and description. The first video is 'IWAS - Saudi Arabien' (4:10, 14 views), the second is '3D Groundwater Model: Western Dead Sea' (3:16, 95 views), and the third is 'Water Challenge Beijing' (3:01, 392 views).

OpenGeoSys hat ein Video hochgeladen vor 12 Stunden

Angesehen **IWAS - Saudi Arabien**
14 Aufrufe
IWAS Modellregion Saudi-Arabien
<http://www.iwas-initiative.de>

OpenGeoSys hat ein Video hochgeladen vor 2 Monaten

Angesehen **3D Groundwater Model: Western Dead Sea**
95 Aufrufe
Development of a 3D groundwater flow model of the western Dead Sea escarpment of the Dead Sea (Israel + West Bank), using the

OpenGeoSys hat ein Video hochgeladen vor 8 Monaten

Angesehen **Water Challenge Beijing**
392 Aufrufe
Water Resources Management in Mega-Cities: Water Challenge Beijing

Christmas lecture wird eine Rolle im HI-2 Beleg spielen ...

Nachtrag zur Christmas Lecture ... Science@YouTube

The screenshot shows the YouTube channel page for 'IWAS - Saudi Arabien'. At the top left is the YouTube logo. To its right is a search bar and the text 'Kategorien'. Below the channel name, there are three buttons: 'OpenGeoSys', '+ Abonnieren', and '3 Videos'. The main video player area is black with the text 'IWAS Modellregion Saudi-Arabien' in blue and white. At the bottom of the player, there are four logos: 'TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN', 'HELMHOLTZ ZENTRUM FÜR UMWELTFORSCHUNG UFZ', 'Stadtentwässerung Dresden WIE KLÄREN DAS FÜR SIE', and 'Bundesministerium für Bildung und Forschung' with 'Gefördert von' below it.

bitte mal anklicken ..., search OpenGeoSys @ YouTube

Hydroinformatik - Anwendungen

1. Abfallwirtschaft: Diffusionsprozesse
2. Hydrology: Gerinnehydraulik (→ this)
3. Grundwasserwirtschaft: Grundwasserhydraulik (→ next)

Lehrinhalte

1. Gerinnehydraulik: Parameter, Symbole ...
2. Energieerhaltung: Bernoulli-Gleichung
3. Impulserhaltung: Saint-Venant-Gleichungen
4. Lösung der Bernoulli-Gleichung
5. Newton-Verfahren
6. \mapsto numerisches Lösungsverfahren (nächste Veranstaltung)

Hydrologie - Gerinnehydraulik

Für die Beschreibung von Strömungsprozessen in Flüssen (d.h. Gerinne) gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten basierend auf den sogenannten Bernoulli (Energiebetrachtung) oder Saint-Venant Gleichungen. Wir verwenden die erste für die Implementierung in C++.



Bernoulli-Gleichung #0

- ▶ History
- ▶ gelebt 1700-1782
- ▶ Freund von L Euler
- ▶ Bernoulli Gleichung
- ▶ kinetische Theorie der Gase
- ▶ russ. Akademie Petersburg
- ▶ Vater/Sohn Beziehung

Bernoulli-Gleichung #1

$$z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\rho g} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad (1)$$

- ▶ Symbole
- ▶ Gesetz von Darcy-Weisbach für streckenabhängige Verluste

$$h_f = \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

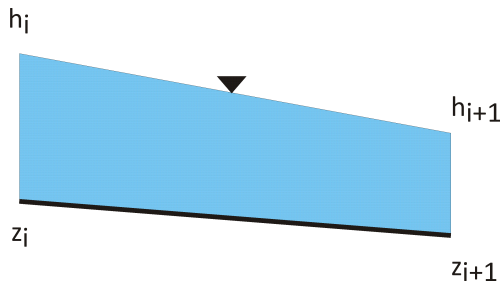
- ▶ Symbole (Zusammenfassung später)
- ▶ Gesetz von Darcy-Weisbach für streckenabhängige Verluste

$$d_{hy} = 4r_{hy} = 4 \frac{A}{P} \quad (3)$$

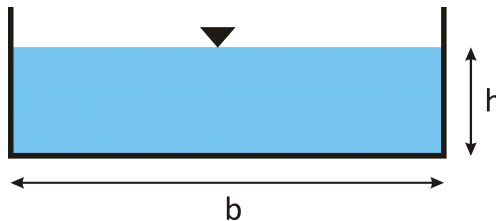
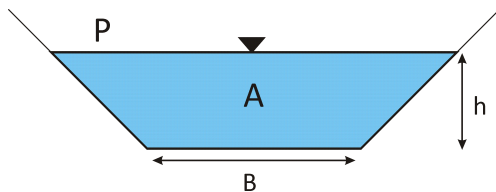
Bernoulli-Gleichung #2

$$p = \rho gh \quad (4)$$

$$z_{i+1} + h_{i+1} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + h_i + \frac{v_i^2}{2g} + h_f, \quad E = h + \frac{v^2}{2g} \quad (5)$$



Channel Geometry



Bernoulli-Gleichung #3

► Durchfluss

$$Q = A v = b h v \quad (6)$$

$$z_{i+1} + h_{i+1} + \frac{Q_{i+1}^2}{2g b^2 h_{i+1}^2} = z_i + h_i + \frac{Q_i^2}{2g b^2 h_i^2} + h_f \quad (7)$$

Fluid Momentum Balance - Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^e + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma \quad (8)$$

In index notation the above vector equation is written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

with $u = v_x, v = v_y, w = v_z$ and $\mathbf{f}^e = \mathbf{g}$.

Saint-Venant-Gleichung #0

- ▶ History
- ▶ gelebt 1797-1886
- ▶ 1D open channel flow
- ▶ shallow water equations (Flachwassergleichungen)
- ▶ Stokes equation (is his)
- ▶ Engineer
- ▶ Count

Saint-Venant-Gleichungen #1

- ▶ Saint-Venant-Gleichungen
- ▶ Vertikal gemittelte Navier-Stokes-Gleichung
- ▶ 2D Flachwasser-Gleichungen (Filmchen)
- ▶ Mittelung über die Querschnittsfläche
- ▶ 1D Gerinnehydraulik
- ▶ Fließgeschwindigkeit $v = Q/A$ in Flußrichtung

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \frac{Q}{A} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2A^2} + gh(x, A) \right) = g(S_o - S_f) \quad (11)$$

Saint-Venant-Gleichungen #2

- ▶ Stationäre Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (A(x, h)v) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} + gh(x, A) \right) &= g(S_o - S_f)\end{aligned}\quad (12)$$

unter Verwendung der Primärvariablen A und Q

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q(h)^2}{2A(h)^2} + gh(x, A) \right) = g(S_o - S_f)\quad (13)$$

- ▶ Nichtlineare Gleichung

Parameter

Symbol	Parameter	Englisch	Einheit
h	Wasserspiegel	water surface elevation	m
i	Sohlspegel	channel datum	m
z	Wassertiefe	water depth	m
Z_L, Z_R	linke / rechte Böschung	left / right channel slope	m
Q	Durchfluss	discharge	m^3s^{-1}
A	Querschnittsfläche	channel cross-section	m^2
B	Breite	channel width	m^2
P	benetzter Umfang	wetted perimeter	m
R, r_{hy}	hydraulische Radius	hydraulic radius	m
U	stromaufwärts	upstream	-
D	stromabwärts	downstream	-
Δx	Abstand zwischen U und D	distance between U and D	m
h_v	kinetische Energie	velocity head	m
h_f	Reibungsverluste	friction head	m
S_o	Sohlgefälle	bed slope	-
S_f	Streckenverlust	friction slope	-

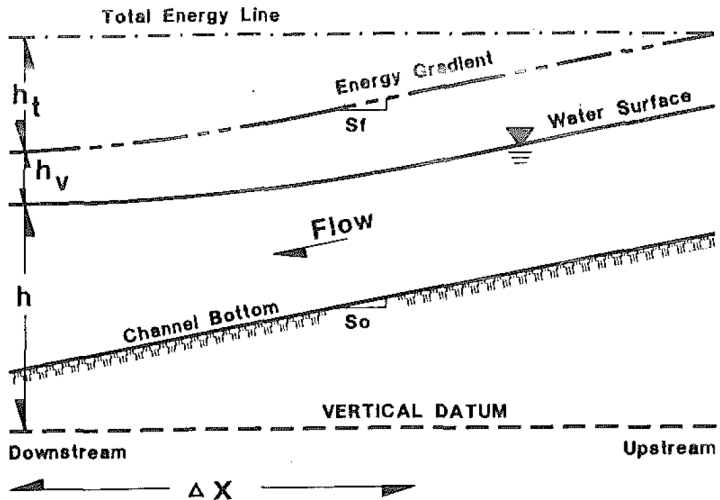
Energiebetrachtung #1

$$z_{i+1} + \frac{p_{i+1}}{\rho g} + \frac{v_{i+1}^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} + h_f \quad (14)$$

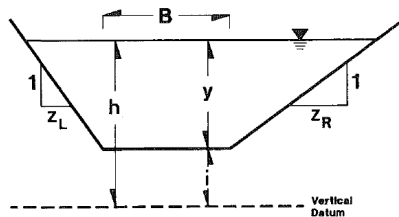
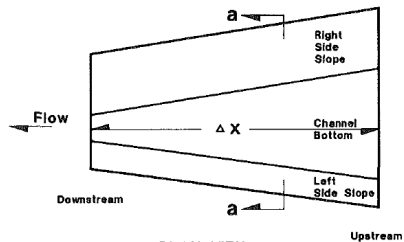
$$h_f = \lambda \frac{x_{i+1} - x_i}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (15)$$

$$d_{hy} = 4r_{hy} = 4 \frac{A}{P} \quad (16)$$

Energiebetrachtung #2: Bernoulli/Saint-Venant



Energiebetrachtung #3: Bernoulli



Energiebetrachtung #4 Geometrie

- Die trapezoide Querschnittsfläche des Gerinnes kann folgendermaßen berechnet werden (Abb. 1).

$$A = y \left[B + y \frac{Z_L + Z_R}{2} \right] \quad (17)$$

- Der benetzte Umfang des Gerinnes ist.

$$P = B + y \left[\sqrt{1 + Z_L^2} + \sqrt{1 + Z_R^2} \right] \quad (18)$$

- Der hydraulische Radius ergibt sich dann als.

$$R = \frac{A}{P} \quad (19)$$

- Letztlich benötigen wir noch den Zusammenhang von Fließgeschwindigkeit und Durchfluss.

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{y \left[B + y \frac{Z_L + Z_R}{2} \right]} \quad (20)$$

Energiebetrachtung #5 Streckenverluste

Die Streckenverluste lassen sich nach Manning wie folgt beschreiben

$$S_f = \left(\frac{Q}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (21)$$

$$S_f = Q^2 A^{-2} R^{-4/3} \quad (22)$$

mit

$$R = \frac{y(B + yC_4)}{B + yC_5} \quad (23)$$

Energiebetrachtung #6 Parameters

$$C_4 = \frac{Z_L + Z_R}{2} \quad (24)$$

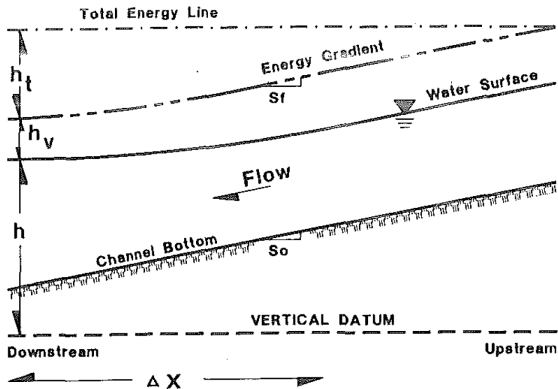
$$C_5 = \sqrt{1 + Z_L^2} + \sqrt{1 + Z_R^2} \quad (25)$$

$$S_f = Q^2 (y(B + C_4 y))^{-2} \left(\frac{y(B + y C_4)}{B + y C_5} \right)^{-4/3} \quad (26)$$

$$S_f = Q^2 (B y + C_4 y)^{-2} (B y + C_4 y^2)^{-4/3} (B + C_5 y)^{4/3} \quad (27)$$

$$S_f = Q^2 (B y + C_4 y^2)^{-10/3} (B + C_5 y)^{4/3} \quad (28)$$

Lösung einer nichtlinearen Gleichung #1



$$f(h) = \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \Big|_D - \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \Big|_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} = 0 \quad (29)$$

Lösung einer nichtlinearen Gleichung #2

$$f(h) = \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) |_D - \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) |_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} \quad (30)$$

$$f(h) = \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) |_D - \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) |_U + \Delta x \frac{(S_{f,U} + S_{f,D})}{2} \quad (31)$$

- Konstruktion eines Newton-Verfahrens

$$h_{k+1} = h_k + \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} \quad (32)$$

Math: Newton-Verfahren #1

- ▶ Nichtlineare Gleichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (f(h) = 0) \quad (33)$$

- ▶ Residuum

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad (34)$$

- ▶ Taylor-Reihe

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \right]_k \Delta \mathbf{x}_{k+1} + 0(\Delta \mathbf{x}_{k+1}^2) \quad (35)$$

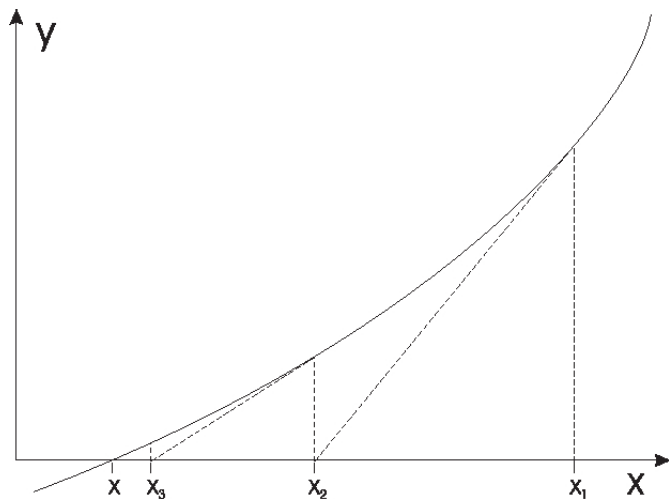
- ▶ Umstellen

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1} \approx -\mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{R}_k \quad (\mathbf{R}_{k+1} = 0) \quad (36)$$

- ▶ Lösungsvorschrift

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{R}_k \quad (37)$$

Math: Newton-Verfahren #2



$$y = R(x)$$

Numerisches Verfahren #1

- ▶ Newton-Verfahren: $\mathbf{x} = h$

$$h_{k+1} = h_k + \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} = \frac{\mathbf{R}_k}{\mathbf{J}_k} \quad (38)$$

- ▶ $f'(h) = f'(y)$

$$\frac{d}{dh} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = 1 - \frac{Q^2}{2gA^3} \frac{dA}{dh} \quad (39)$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{d}{dh} (z(B + C_4y)) = B + C_4y + yC_4 = B + 2C_4y \quad (40)$$

Numerisches Verfahren #2

Bleibt noch die Differenzierung der Streckenverluste

$$\frac{dS_f}{dh} = S'_f = \frac{d}{dh} \left(\frac{Q}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (41)$$

$$S'_f = \left[Q^2 (By + C_4 y^2)^{10/3} \frac{4}{3} (B + C_5 y)^{1/3} C_5 \right] + \left[(B + y C_5)^{4/3} \frac{-10 Q^2}{3} (By + C_4 y^2)^{13/3} (B + 2 C_4 y) \right] \quad (42)$$

$$S'_f = \frac{4}{3} Q^2 C_5 (By + C_4 y^2)^{-10/3} (B + C_5 y)^{1/3} - \frac{10}{3} Q^2 (B + 2 C_4 y) (B + C_5 y)^{4/3} (By + C_4 y^2)^{-13/3} \quad (43)$$